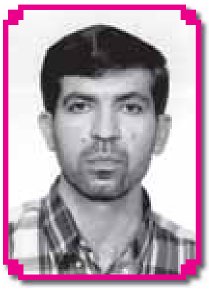
دکتر محرم‌نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی



پای تخته

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماه‌نامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماه‌نامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماه‌نامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماه‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماه‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

بخش اول: مسئله‌ها

۳۰۱. فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح است که می‌توان به‌صورت مجموع مربع دو عدد صحیح نوشت. ثابت کنید S نسبت به عمل ضرب بسته است. یعنی اگر: $x,y\in S$، آن‌گاه: $xy\in S$.

۳۰۲. برای هر عدد طبیعی n، بزرگ‌ترین توان ۲ را پیدا کنید که حاصل $(2^n)!$ را عاد کند.

۳۰۳. از راننده پرسیدم: نتیجهٔ بازی والیبال چی شد؟ گفت: دو سِت را ایران برده و دو سِت را لهستان. سِت پنجم هم تا اینجا ۵-۵ هستند.

الف) برای چهار سِت اول چند حالت متفاوت وجود دارد؟

ب) برای امتیازهای سِت پنجم چند حالت متفاوت وجود دارد؟

۳۰۴. چند تابع از $\{1,2,\ldots,10\}$ به $\{1,2,\ldots,10\}$ می‌توان تعریف کرد، به‌طوری که برای هر x، $f(x)-x$ مضرب ۵ باشد؟

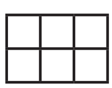
۳۰۵. میانگین ده عدد طبیعی برابر است با ۱۰. ثابت کنید اگر k عددی طبیعی کوچک‌تر از ۱۱ باشد، حداقل k عدد با میانگین حداقل ۱۰ در میان این اعداد وجود دارد.

۳۰۶. حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی برابر است با: ۱۲۳۰. کمترین مقدار مجموع آن‌ها چقدر است؟

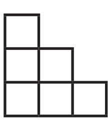
۳۰۷. می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۶ را در خانه‌های جدول‌های زیر بنویسیم. به‌طوری که مجموع هر دو خانهٔ مجاور (دو خانه با ضلع مشترک) فرد باشد. برای هر شکل تعداد حالت‌های ممکن را به‌دست آورید.

۱)

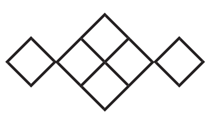
۲)



۳)

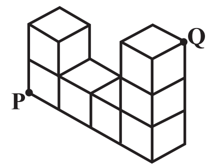


۴)



۳۰۸. اگر $\overline{abcd}$ یک عدد چهاررقمی باشد، جمع لایه‌ای آن برابر $\overline{abcd}+\overline{bcd}+\overline{cd}+d$ تعریف می‌شود. اگر جمع لایه‌ای یک عدد چهاررقمی برابر ۲۰۱۴ باشد، آن‌گاه مجموع رقم‌های آن چقدر است؟

۳۰۹. در شکل زیر طول پاره‌خط PQ چقدر است؟



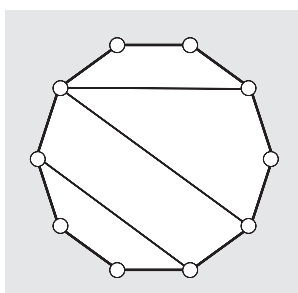
۳۱۰. مجموع سه عدد سه رقمی $\overline{aaa}$، $\overline{bbb}$ و $\overline{ccc}$ برابر عدد چهار رقمی $\overline{cbba}$ شده است. ارقام a، b و c را مشخص کنید.

بخش دوم:
راه‌حل‌ها

۲۷۱. پانزده دانش‌آموز در یک اردوی تابستانی شرکت کردند. هر روز سه دانش‌آموز موظف بودند که در پایان کلاس‌های آن روز، کلاس را تمیز کنند. در پایان اردو، معلوم شد که هر دو دانش‌آموز دقیقاً یک روز با هم در گروه‌های مذکور شرکت داشته‌اند. این اردو چند روز طول کشیده است؟

اگر اردو n روز طول کشیده باشد، آن‌گاه خواهیم داشت: $n\binom{۳}{۲}=\binom{۱۵}{۲}$. در نتیجه: n=۳۵. برای اثبات تساوی فوق کافی است تعداد زوج‌هایی را که در یک روز با هم کلاس را تمیز کرده‌اند، به دو طریق بشمارید.

۲۷۲. یک nضلعی محدب را می‌خواهیم به چهارضلعی‌هایی افراز کنیم. برای این کار چند قطر که در داخل nضلعی متقاطع نیستند باید رسم کنیم تا سطح nضلعی به چهارضلعی‌ها افراز شود؟ شرط لازم و کافی برای وجود چنین افرازی چیست؟ در صورت برقراری شرایط مذکور، چند قطر باید رسم کنیم؟ در شکل افرازی از یک ۱۰ضلعی را می‌بینید.



مجموع زوایای داخلی یک nضلعی محدب برابر است با: $(n-۲)\pi$. اگر سطح nضلعی به m چهار ضلعی افراز شود، آن‌گاه باید داشته باشیم: $m=\frac{(n-۲)\pi}{۲\pi}$. در نتیجه باید n زوج باشد و در نتیجه: $m=\frac{n}{۲}-۱$. می‌توان به کمک استقرا کافی بودن این شرط را ثابت کرد. اگر k تعداد قطرهای رسم شده باشد، با شمارش تعداد اضلاع m چهارضلعی خواهیم داشت: $۴(\frac{n}{۲}-۱)=n+۲k$. در نتیجه: $k=\frac{n}{۲}-۲$.

۲۷۳. ساعت دیواری کلاس ما فقط عقربه ساعت‌شمار دارد. اگر عقربه $\frac{۷}{۸}$ از فاصلهٔ بین ۴ و ۵ را طی کرده باشد، ساعت دقیقاً چند است؟

طی شدن $\frac{۷}{۸}$ از فاصلهٔ بین ۴ و ۵ معادل است با: $\frac{۷}{۸}(۶۰)=۵۳/۵$ دقیقه. در نتیجه ساعت دقیقاً ۶/۵ دقیقه مانده به ۵ است.

۲۷۴. در یک فروشگاه بسته‌های ۷تایی، ۱۳تایی و ۲۵تایی از کیک فروخته می‌شود. مثلاً اگر شما ۱۴ کیک بخواهید، باید دو بستهٔ ۷تایی بخرید، اما هیچ امکانی برای خرید دقیقاً ۱۵ کیک وجود ندارد. بیشترین مقدار n را بیابید، به‌طوری که امکان خرید n کیک از این فروشگاه وجود نداشته باشد.

پاسخ ۴۴ است. با بررسی تعداد بسته‌های ۱۳تایی و ۲۵تایی (شش حالت) می‌توان به راحتی نشان داد که ۴۴ کیک را نمی‌توان خرید. از طرف دیگر:

۴۵=۷+۱۳+۲۵ , ۴۶=۲۱+۲۵ , ۴۷=۲۱+۲۶ , ۴۹=۷×۷ ,
۵۰=۲×۲۵ , ۵۱=۲۶+۲۵

در نتیجه تعداد کیک‌های خریداری شده می‌تواند هر عددی بزرگ‌تر از ۴۴ باشد (۴۵ تا ۵۱ قابل قبول هستند. با اضافه کردن مضارب ۷ به این اعداد، همهٔ اعداد بعدی هم قابل قبول هستند).

۲۷۵. می‌خواهیم ۱۰۰ کبوتر را در تعدادی قفس جای دهیم، به‌طوری که تعداد کبوترها در قفس‌ها دوبه‌دو متفاوت باشد و اگر قفس‌ها را برحسب تعداد کبوترها مرتب کنیم، اختلاف کبوترها در دو قفس متوالی حداکثر ۲ باشد. آیا این کار امکان‌پذیر است؟

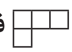
اگر n تعداد قفس‌ها باشـــد، برای هر $۱\leq n\leq ۱۳$، این کار امکان‌پذیر اســـت. در صورت مســـئله این خواسته جاافتاده اســـت که می‌خواهیم تعداد قفس‌ها ماکزی‌مم باشـــد. پس تلاش کنید ثابت کنید تعداد قفس‌ها نمی‌تواند ۱۴ یا بیشتر باشـــد. چون: $۱+۲+...+n\leq ۱+۲+...+۱۳=۹۱$، می‌توان در قفـــس اول ۱، در قفـــس دوم ۲ کبوتـــر، ...، در قفس nام n کبوتر قرار دهیم. باقی‌مانـــدۀ کبوترها را اگر m فرض کنیم، ســـعی می‌کنیم m کبوترها را تا جایی که ممکن اســـت به نسبت مساوی در قفس‌ها توزیع کنیم. اگر m را بر n تقسیم کنیم، خواهیم داشـــت: $m=nq+r$ که در آن: $۰\leq r\leq n$ آن‌گاه بـــه هر قفس q کبوتر اضافه می‌کنیـــم. r کبوتر باقی‌مانده را در r قفس آخر قرار می‌دهیم تا اختلاف کبوترهای دو قفس متوالی از ۲ بیشتر نشود.

۲۷۶. در شکل زیر، هر خانه با یک عدد پر شده است، به‌طوری که مجموع هر سه عدد متوالی برابر است با ۱۹. عدد d را مشخص کنید.

۴	a	b	c	d	e	f	g	۸	h

چـــون: $۴+a+b=۱۹=a+b+c$، پـــس: $c=۴$. بـــه همین ترتیب می‌توان گفت: $f=۴$ و $h=۴$.

در نتیجه: $g=۱۹-۸-۴=۷$. چون: $d+e+f=e+f+g$، در نتیجه: $d=۷$.

۲۷۷. یک مربـــع ۴×۴ را می‌خواهیم با موزاییک‌هایی به فرم  فرش کنیم. به چند طریـــق این کار امکان‌پذیر است؟

یک خانۀ گوشـــه را در نظر بگیریـــد. اگر خانه‌های یک موزاییک را به صورت زیر شماره‌گذاری کنیم، خانۀ گوشه فقط می‌تواند ۱، ۲، و یا ۴ باشد.

۱	۲	۳
۴		

با حالت‌بندی و شـــمارش خواهیم دید که در حالت اول ۴ طریق، در حال دوم ۴ طریق، در حالت ســـوم ۲ طریق و در مجموع ۱۰ طریق برای موزاییک‌بندی انتخاب وجود دارد.

۲۷۸. رضا تعـــدادی نقطه داخل یک مربـــع انتخاب کرد و ســـهراب با وصل کردن بعضی از آن‌ها به‌هم ســـطح مربع را به مثلث‌هایی کوچک‌تر افراز کرد، به‌طوری که رأس‌های مثلث‌ها یا یکی از چهار رأس مربع بودند و یا یکی از نقاط اضافه شده توسط رضا. اگر تعداد مثلث‌ها ۹۶ باشـــد، تعداد نقطه‌هایی که رضا اضافه کرده بود، چندتا بود؟

مجموع زاویه‌های تمام مثلث‌ها برابر اســـت با: ۹۶π. از طرف دیگر، اگر k نقطه در داخل مربع اضافه کرده باشـــیم، مجموع زاویه‌ها برابر است با: $k\times ۲\pi+۲\pi$. در نتیجه: $k=۴۷$.

۲۷۹. a، b و c ســـه عدد حقیقی هستند. ثابت کنید حداقل یکی از سه معادلۀ زیر ریشۀ حقیقی دارد:

$$ax^۲+۲bx+c=۰,\quad bx^۲+۲cx+a=۰,\quad cx^۲+۲ax+b=۰$$

برای آنکه یکی از معادله‌ها ریشۀ حقیقی داشته باشد، باید حداقل یکی از این نامســـاوی‌ها برقرار باشد: $a^۲-bc\geq ۰$، $b^۲-ac\geq ۰$ و $c^۲-ab\geq ۰$. دو راه برای اثبات وجود دارد:

روش اول (برهـــان خلف): اگر چنین نباشـــد، آن‌گاه $a^۲<bc$، $c^۲<ab$ و $b^۲<ac$. در نتیجـــه: $b^۲c^۲a^۲<acabbc$ و یا: $a^۲b^۲c^۲<a^۲b^۲c^۲$ که تناقض است.

روش دوم: اگـــر $x=\max\{|a|, |b|, |c|\}$، آن‌گاه حتمـــاً: $x^۲\geq yz$ که در آن y و z دو عدد دیگر به جز x هستند.

۲۸۰. ۹۶ عدد حقیقی مثبت دور یک دایره مفروض‌اند. ثابت کنید دو عدد متوالی وجـــود دارند که مجموع اولی و معکوس دومی از ۲ کمتر نیست. (ترتیب اعداد در جهت ساعت‌گرد است.)

برهان خلف. فرض کنید عددها به ترتیب $x_۱$ تا $x_{۹۶}$ باشند و داشته باشیم:

$$x_۱+\frac{۱}{x_۲}<۲, x_۲+\frac{۱}{x_۳}<۲, \ldots, x_{۹۶}+\frac{۱}{x_۱}<۲$$

در نتیجه با جمع نامساوی‌ها خواهیم داشت:

$$(x_۱+\frac{۱}{x_۱})+(x_۲+\frac{۱}{x_۲})+\ldots+(x_{۹۶}+\frac{۱}{x_{۹۶}})<۲\times ۹۶$$

در نتیجـــه حداقل بـــرای یکی از این ۹۶ مقـــدار، مانند $x_i+\frac{۱}{x_i}$، باید داشته باشیم: $x_i+\frac{۱}{x_i}<۲$ که تناقض است، چون:

$$x_i+\frac{۱}{x_i}<۲ \Leftrightarrow x_i^۲-۲x_i+۱<۰ \Leftrightarrow (x_i-۱)^۲<۰$$